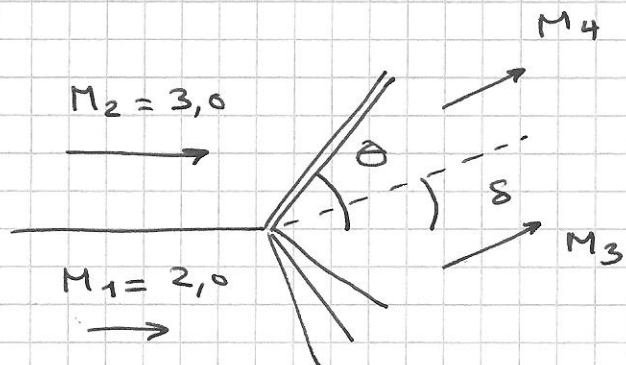


Exercice 9.4

De part et d'autre de la surface de contact la pression doit être la même

$$P_3 = P_4$$

De plus, par définition, les écoulements dans les régions ③ et ④ sont parallèles.



$$\frac{P_1}{P_2} = 4,0$$

* Partie supérieure - onde de choc oblique

$$\text{On a : } \frac{P_4}{P_2} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{n,2}^2 - 1)$$

$$\text{avec } M_{n,2} = M_2 \sin \theta$$

$$\text{On a ainsi : } (M_2 \sin \theta)^2 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{P_4}{P_2} - 1 \right) + 1$$

On rappelle la relation pour une onde de choc oblique

$$\tan \delta = 2 \cot \theta \frac{(M_2 \sin \theta)^2 - 1}{M_2^2 (\gamma + \cos 2\theta) + 2}$$

$$\text{Or : } \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

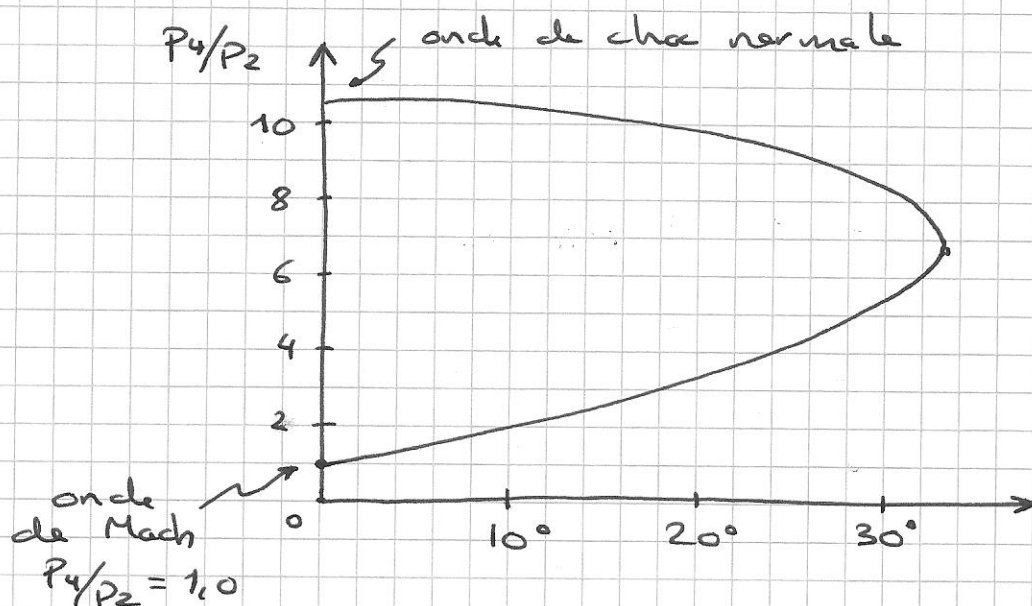
$$\cot \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta} - 1}$$

$$\text{Avec } \sin^2 \theta = \frac{1}{M_2^2} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{P_4}{P_2} - 1 \right) + 1 \right]$$

on peut aussi ré-écrire la relation pour une onde de choc oblique en exprimant $\tan \delta$ en fonction de M_2 (connu) et P_4/P_2 (à évaluer):

$$\tan \delta = \pm \frac{P_4/P_2 - 1}{1 + \gamma M_2^2 - P_4/P_2} \left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_2^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{P_4}{P_2}}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{P_4}{P_2}} \right)^{1/2} \quad (\text{I})$$

On peut alors tracer $\frac{P_4}{P_2}$ en fonction de δ



* Partie inférieure - onde de détente

On utilise le fait que l'écoulement est isentropique à travers une onde de détente

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

On peut alors exprimer M en fonction de $\frac{P_0}{P}$

$$M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

La fonction de Prandtl-Meyer :

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} - \arctan \sqrt{M^2-1}$$

peut alors être exprimée en fonction de $\frac{P_0}{P}$

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} - \arctan \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

En particulier : $v_1 = f\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$

$$\text{avec } \frac{P_0}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

De plus : $v_3 = f\left(\frac{P_0}{P_3}\right)$

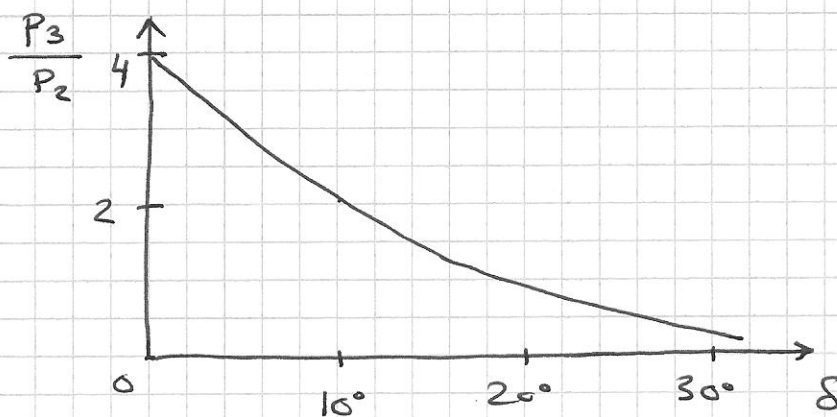
$$\text{avec } \frac{P_0}{P_3} = \frac{P_0}{P_1} \cdot \underbrace{\frac{P_1}{P_2}}_{=4,0} \cdot \frac{1}{P_3/P_2}$$

$$\Rightarrow v_3 = f\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$$

Or : $S = v_3 - v_1$, (on prend $\delta > 0$)

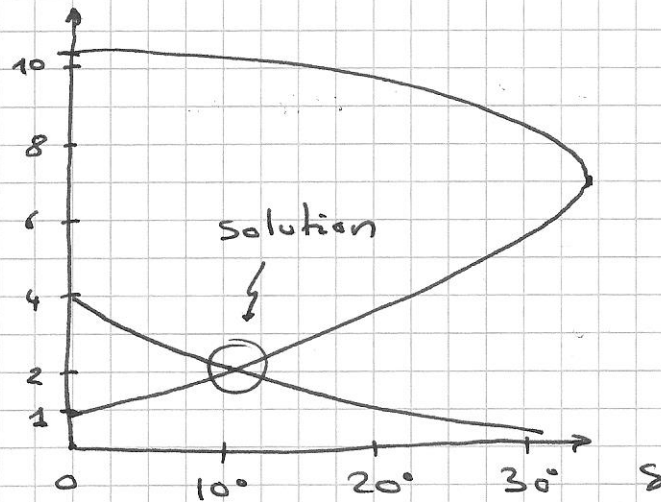
Ainsi : $\boxed{S = f\left(\frac{P_3}{P_2}\right)} \quad (\text{II})$

Cette fonction peut être alors tracée :



Comme $P_3 = P_4$, on peut trouver δ à partir des relations (I) et (II)

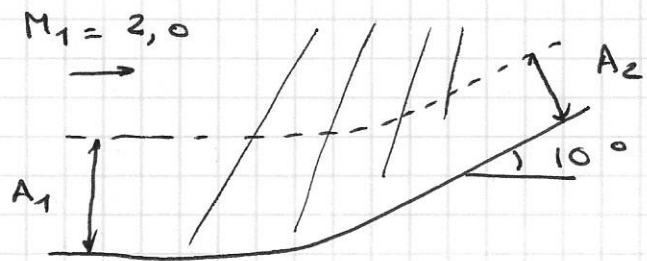
Graphiquement :



Numériquement, on trouve $\delta = 10,4964^\circ$

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_2} = 2,1229$$

Exercice 9.5



* Pour $M_1 = 2,0$, on a: $\nu_1 = 26,3798^\circ$

Comme il s'agit d'une compression:

$$\nu_1 - \nu_2 = 10^\circ \Rightarrow \nu_2 = 16,3798^\circ$$

$$\Rightarrow M_2 = 1,6514$$

A partir des tables isentropes (ou formules isentropes):

$$M_1 = 2,0 \Rightarrow \frac{A_1}{A^*} = 1,6875$$

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 0,7665$$

$$M_2 = 1,6514 \Rightarrow \frac{A_2}{A^*} = 1,2934$$

* Pour $M_1' = 1,5 \Rightarrow \nu_1' = 11,9052^\circ$

$$\nu_1' - \nu_2' = 10^\circ \Rightarrow \nu_2' = 1,9052^\circ$$

$$\Rightarrow M_2' = 1,1282$$

$$M_1' = 1,5 \Rightarrow \frac{A_1'}{A^{*'}} = 1,1762$$

$$\Rightarrow \frac{A_2'}{A_1'} = 0,8612$$

$$M_2' = 1,1282 \Rightarrow \frac{A_2'}{A^{*'}} = 1,0129$$

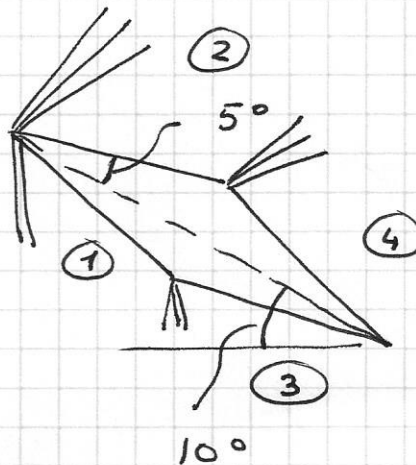
Si $A_1 = A_1'$, on voit que $A_2 \neq A_2'$

Pour une compression isentrope, une paroi fixe n'est optimisée que pour un seul point de fonctionnement (c.a.d. un seul nombre de Mach).

Exercice 9.6

$$M_{\infty} = 3,0$$

$$P_{\infty}$$



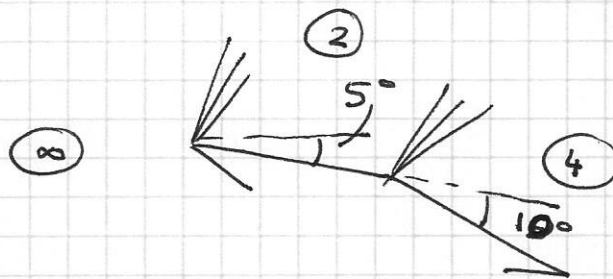
Pour $M_{\infty} = 3,0$, on a $\gamma_{\infty} = 49,7573^{\circ}$

* Sur l'extrados (partie supérieure) :

- $\gamma_2 - \gamma_{\infty} = 5^{\circ}$

$$\Rightarrow \gamma_2 = 54,7573^{\circ}$$

$$\Rightarrow M_2 = 3,2731$$



Avec des tables isentropes

$$\frac{P_2}{P_{\infty}} = \frac{P_2}{P_0} \cdot \frac{1}{\frac{P_{\infty}}{P_0}} = (0,0182) \cdot \frac{1}{0,0272} = 0,6676$$

$$(\text{avec } P_0 = P_{0,2} = P_{0,\infty})$$

- $\gamma_4 - \gamma_2 = 10^{\circ}$

$$\Rightarrow \gamma_4 = 64,7573^{\circ}$$

$$\Rightarrow M_4 = 3,9233$$

$$\frac{P_4}{P_{\infty}} = \frac{P_4}{P_0} \cdot \frac{1}{\frac{P_{\infty}}{P_0}} = (0,0073) \cdot \frac{1}{0,0272} = 0,2681$$

* Sur l'intrados (partie inférieure)

- Pour le choc oblique :

$$M_{\infty} = 3,0$$

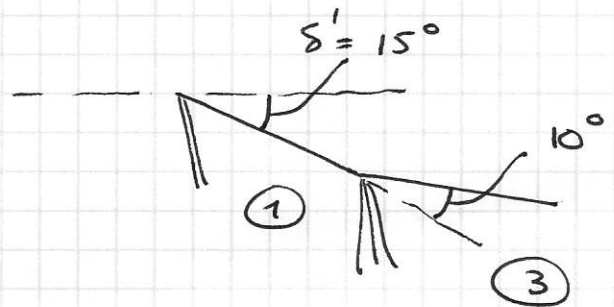
$$\delta' = 15^{\circ}$$

$$\Rightarrow \Theta = 32,2404^{\circ}$$

$$\Rightarrow M_1 = 2,2549$$

$$\frac{P_{0,1}}{P_{0,\infty}} = 0,8950$$

$$\frac{P_1}{P_{\infty}} = 2,8216$$



- Détente de P.M.

$$M_1 = 2,2549 \Rightarrow \nu_1 = 33,1433^{\circ}$$

$$\nu_3 - \nu_1 = 10^{\circ} \Rightarrow \nu_3 = 43,1433^{\circ}$$

$$\Rightarrow M_3 = 2,6780$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{P_{0,3}} = 0,0444$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{P_{\infty}} = \frac{P_3}{P_{0,3}} \cdot \frac{P_{0,3}}{P_{0,1}} \cdot \frac{P_{0,1}}{P_{0,\infty}} \cdot \frac{P_{0,\infty}}{P_{\infty}}$$

$$= (0,0444) \cdot (1) \cdot (0,8950) \cdot \frac{1}{0,0272}$$

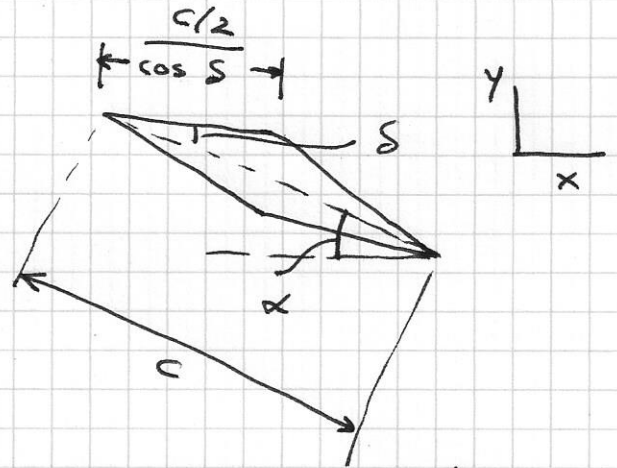
$$= 1,4607$$

* Traînée et portance

Dans chaque région ①, ②, ③ et ④ la pression agit sur un plan de longueur :

$$\frac{c/2}{\cos \delta}$$

où c est la corde totale
et δ le demi-angle du dièdre



Si α est l'angle d'attaque
(ou l'angle d'incidence)

la traînée et la portance s'obtiennent en intégrant la pression (constante) sur chaque plan et en projetant, respectivement, sur l'axe x et l'axe y .

Ainsi, la traînée et la portance :

$$F_x = p_1 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \sin(\alpha + \delta) + p_3 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \sin(\alpha - \delta) \\ - p_2 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \sin(\alpha - \delta) - p_4 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \sin(\alpha + \delta)$$

$$F_y = p_1 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \cos(\alpha + \delta) + p_3 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \cos(\alpha - \delta) \\ - p_2 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \cos(\alpha - \delta) - p_4 \cdot \frac{c/2}{\cos \delta} \cdot \cos(\alpha + \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{F_x}{p_\infty \cdot c} = 0,3664 \quad \frac{F_y}{p_\infty \cdot c} = 1,6345$$

Avec les coefficients : $c = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c} = \frac{F}{\frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 c}$

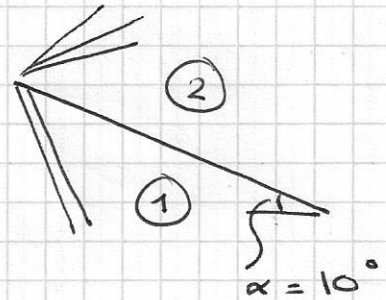
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} C_x &= \frac{0,3664}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = 0,0582 \\ C_y &= \frac{1,6345}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = 0,2594 \end{aligned}}$$

Exercice 9.7

Dans cet exercice, nous ne nous occuperons que de la portance.

a) Sur l'extrados:

$$M_{\infty} = 7$$



$$M_{\infty} = 7$$

$$\gamma_{\infty} = 90,97^{\circ}$$

$$\Rightarrow \gamma_2 = \gamma_{\infty} + 10^{\circ} = 100,97^{\circ}$$

$$\Rightarrow M_2 = 9,56$$

A partir des tables (ou formules) isentropes :

$$\frac{P_{\infty}}{P_{0,\infty}} = 2,42 \times 10^{-4}$$

$$\frac{P_2}{P_{0,2}} = 3,18 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_{\infty}} = \frac{P_2}{P_{0,2}} \cdot \frac{P_{0,2}}{P_{0,\infty}} \cdot \frac{1}{\frac{P_{\infty}}{P_{0,\infty}}}$$

$$= (3,18 \times 10^{-5}) \cdot (1) \cdot \frac{1}{2,42 \times 10^{-4}} = 0,131$$

Sur l'intrados :

$$M_{\infty} = 7, \delta = 10^{\circ}$$

$$\Rightarrow \Theta = 16,38^{\circ}$$

$$M_{n,\infty} = M_{\infty} \cdot \sin \Theta = 7 \cdot \sin(16,38^{\circ}) = 1,974$$

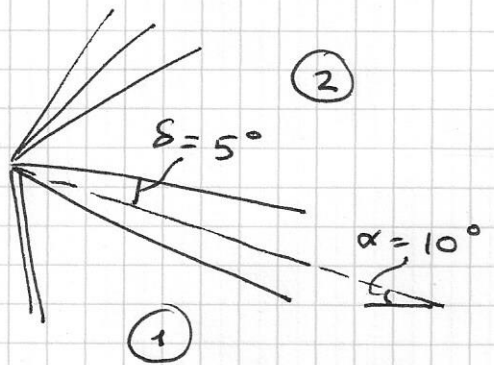
$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_{\infty}} = 4,38$$

Ainsi : $C_y = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left(\frac{P_1}{P_{\infty}} - \frac{P_2}{P_{\infty}} \right) \cdot \cos \alpha$

$$\Rightarrow \boxed{C_y = 0,122}$$

b) Sur l'extrados :

$$Ma = 7$$



$$Ma = 7$$

$$\gamma_{\infty} = 90,97^{\circ}$$

$$\Rightarrow \gamma_2 = \gamma_{\infty} + 5^{\circ} = 95,97^{\circ}$$

$$\Rightarrow M_2 = 8,09$$

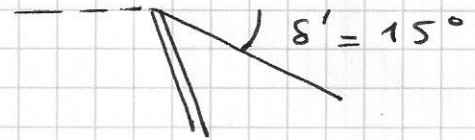
A partir des formules isentropes :

$$\frac{P_2}{P_{0,2}} = 9,56 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_{\infty}} = \frac{P_2}{P_{0,2}} \cdot \frac{P_{0,2}}{P_{0,\infty}} \cdot \frac{1}{\frac{P_{\infty}}{P_{0,\infty}}} = (9,56 \times 10^{-5}) \cdot (1) \cdot \frac{1}{2,42 \times 10^{-4}} = 0,395$$

Sur l'intrados :

$$Ma = 7, \quad \delta' = 15^{\circ}$$



$$\Rightarrow \Theta = 21,60^{\circ}$$

$$M_{n,\infty} = Ma \cdot \sin \Theta = 7 \cdot \sin (21,60^{\circ}) = 2,58$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_{\infty}} = 7,59$$

Ainsi :
$$C_y = \frac{2}{\gamma Ma^2} \frac{1}{\cos \delta} \left(\frac{P_1}{P_{\infty}} \cos (\alpha + \delta) - \frac{P_2}{P_{\infty}} \cos (\alpha - \delta) \right)$$

$$= \frac{2}{(1,4)(7)^2} \frac{1}{\cos(5^{\circ})} \left[7,59 \cos(15^{\circ}) - 0,395 \cos(5^{\circ}) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{C_y = 0,203}$$

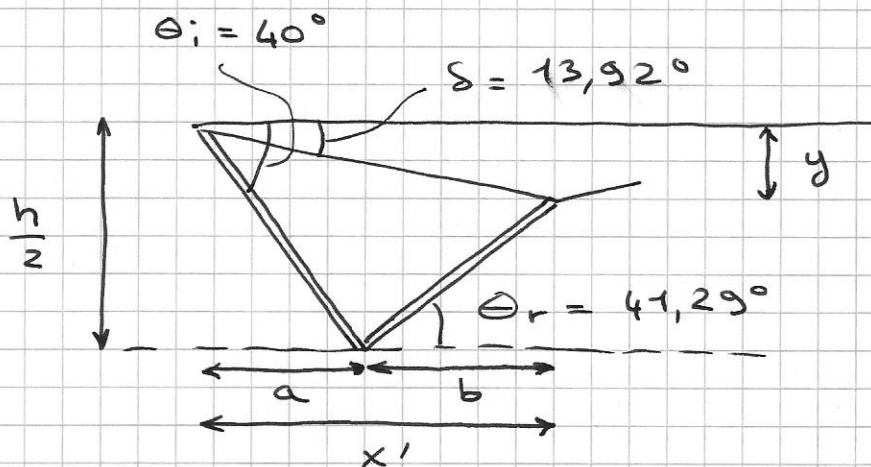
c) On remarque que pour un même angle d'incidence, le dièdre génère une force de portance presque deux fois plus grande que celle d'une plaque plane.

Pour un empennage vertical, cette portance correspond à une force latérale sur l'avion.

Ainsi, pour un véhicule supersonique, une forme diédrique est préférable à une plaque plane, comme le démontre la géométrie de l'empennage vertical du X-15.

9.8

On utilise le principe que le plan de symétrie du biplan (en pointillé) agit comme la paroi solide de l'exercice 8.4. Les deux problèmes sont alors identiques.



On peut établir les relations géométriques (simples) suivantes :

$$(i) \quad \tan \theta_i = \frac{h/2}{a}$$

$$(ii) \quad \tan \theta_r = \frac{h/2 - y}{b}$$

a, b indiqués sur le schéma

$$(iii) \quad a + b = x'$$

$$(iv) \quad \tan \delta = \frac{y}{x'}$$

De (i), on a : $\frac{a}{h} = \frac{1}{2 \tan \theta_i}$

De (iv), on a : $\frac{y}{h} = \frac{x'}{h} \cdot \tan \delta$

En introduisant ce résultat dans (ii) :

$$\begin{aligned} \frac{b}{h} &= \frac{1}{\tan \theta_r} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) \\ &= \frac{1}{\tan \theta_r} \left(\frac{1}{2} - \frac{x'}{h} \cdot \tan \delta \right) \end{aligned}$$

En utilisant (iii) : $\frac{a}{h} + \frac{b}{h} = \frac{x'}{h}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \tan \theta_i} + \frac{1}{\tan \theta_r} \left(\frac{1}{2} - \frac{x'}{h} \cdot \tan \delta \right) = \frac{x'}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{h} = \frac{1}{2 \tan \theta_i} \cdot \frac{\tan \theta_r + \tan \theta_i}{\tan \theta_r + \tan \delta}$$

Application numérique : $\boxed{\frac{x'}{h} = 0,909}$

A partir de (iv) : $\frac{y}{h} = \frac{x'}{h} \cdot \tan \delta$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y}{h} = 0,225}$$

⑥ Avec les données de l'exercice 8.4 :

$$M_1 = 2,2$$

$$\Theta_i = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \Theta}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \text{avec } \gamma = 1,4$$

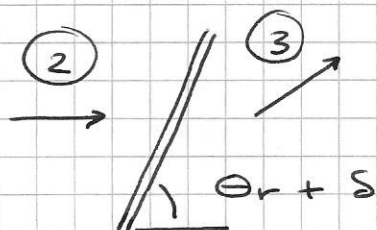
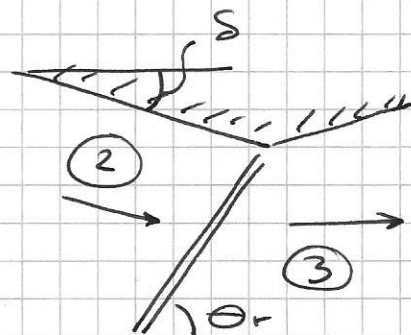
$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = 2,1664}$$

Avec les tables pour ondes de choc normal :

$$M_{n,1} = M_1 \sin \Theta = 1,4141$$

$$\text{Par interpolation : } \frac{P_2}{P_1} = 2,1665$$

Pour trouver la pression dans la région ③, il est préférable de tourner le schéma afin de se mettre dans une configuration d'onde de choc familière.



Tourner dans le sens horaire d'un angle S.

Avec $M_2 = 1,669$ (exercice 8.4.)

$$\Theta' = \Theta_r + S = 41,29^\circ + 13,92^\circ = 55,21^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{P_2} = \frac{2\gamma M_2^2 \sin^2 \Theta'}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

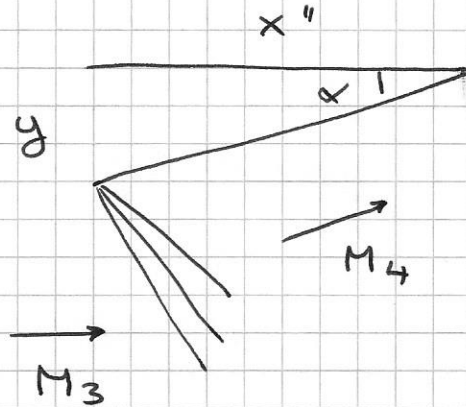
$$\boxed{\frac{P_3}{P_2} = 2,0252}$$

Avec les tables :

$$M_{n,2} = M_2 \sin \Theta' = 1,3707$$

$$\Rightarrow \left| \frac{P_3}{P_2} = 2,0253 \right.$$

Pour trouver les conditions dans la région (4), on utilise les principes des écoulements de Prandtl-Meyer :



Pour $M_3 = 1,140$ (exercice 8.4)

$$\Rightarrow \nu_3 = 2,16^\circ$$

$$\text{D'autre part : } \tan \alpha = \frac{y}{x''} = \frac{y/h}{x''/h} = \frac{0,225}{0,8}$$

donnée du problème

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 15,71^\circ}$$

$$\Rightarrow \nu_4 = \nu_3 + \alpha = 17,87^\circ$$

A partir des tables de P-M, on trouve alors :

$$M_4 = 1,702$$

Comme l'écoulement est isentrope entre les régions (3) et (4), on peut utiliser la relation :

$$\frac{P_4}{P_3} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_4^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_4}{P_3} = 0,4534$$

Avec les tables, on peut évaluer $\frac{P_3}{P_0}$ et $\frac{P_4}{P_0}$ où P_0 est une pression totale dans les régions (3) et (4)

(mais on n'aura pas besoin de la connaître, car seul le rapport P_3/P_4 nous intéresse).

$$\text{Ainsi, pour } M_3 = 1,140 \Rightarrow \frac{P_3}{P_0} = 0,4455$$

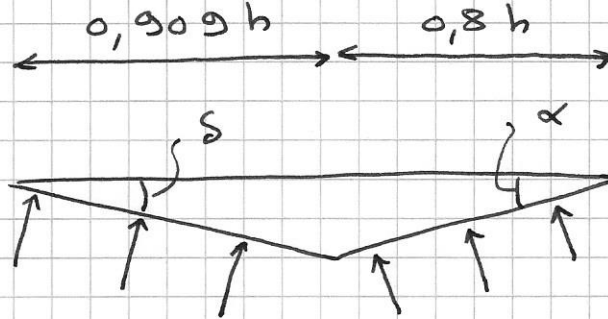
$$M_4 = 1,702 \Rightarrow \frac{P_4}{P_0} = 0,2020$$

$$\Rightarrow \frac{P_4}{P_3} = 0,4534$$

On a alors :

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_4}{P_3} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_4}{P_1} = 1,9892}$$



$$\frac{P_2}{P_1} = 2,1665$$

$$\frac{P_4}{P_1} = 1,9892$$

On remarque le fait remarque que les pressions P_2 et P_4 sont très proches.

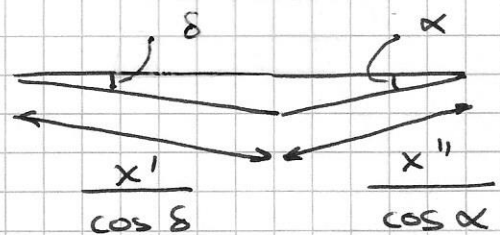
Alors que la pression P_2 va générer une traînée, la pression P_4 va générer une poussée dans le sens contraire.

La force résultante (dans le sens de l'écoulement) va alors être très faible.

Ce phénomène est dû à l'onde de choc entre la région ② et ③.

On verra que pour un monoplane, cette onde de choc n'est pas présente, et la traînée va être beaucoup plus grande.

Soit F_x la force dans le sens de l'écoulement.



$$F_x = 2L \left(P_2 \cdot \frac{x'}{\cos \delta} \cdot \sin \delta - P_4 \cdot \frac{x''}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \right)$$

profil du haut et du bas

profondeur du profil

Or : $x' \tan \delta = y$ et $x'' \tan \alpha = y$

Ainsi : $F_x = 2 L y (P_2 - P_4)$

le coefficient de traînée :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 c L}$$

avec la corde $c = x' + x'' = 0,909h + 0,8h$

$$c = 1,709 h$$

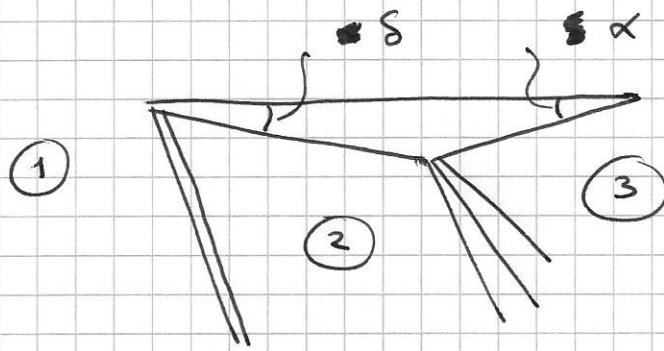
De plus : $\rho_1 U_1^2 = \rho_1 M_1^2 \gamma \frac{P_1}{\rho_1} = \gamma P_1 M_1^2$

$$\Rightarrow C_x = \frac{4}{1,709} \cdot \frac{y}{h} \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - \frac{P_4}{P_1} \right) \cdot \frac{1}{\gamma M_1^2}$$

Application numérique :

$$C_x = 0,0138$$

(c) Pour un profil isolé



Pour la région (2) : $\frac{P_2}{P_1} = 2,1664$

Pour trouver la pression dans la région (3), on utilise les principes des écoulements de Prandtl-Meyer.

$$M_2 = 1,669 \Rightarrow \nu_2 = 16,90^\circ$$

Par géométrie : $\nu_3 = \nu_2 + \alpha + \delta$

$$\Rightarrow \nu_3 = 46,53^\circ$$

Avec les tables de P-M, on trouve alors :

$$M_3 = 2,8379$$

En utilisant la procédure de la partie (b), on trouve alors :

$$\frac{P_3}{P_2} = 0,1638$$

$$\text{Ainsi : } \frac{P_3}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1}$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{P_1} = 0,3550$$

Avant même de faire les calculs de traînée on remarque ici que la pression sur la partie arrière du profil, P_3/P_1 , est nettement inférieure à la pression trouvée dans la partie (b).

Il y aura donc moins de poussée sur le profil, et ainsi plus de traînée.

un seul profil

$$C_x = \frac{2}{1,709} \cdot \frac{y}{h} \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - \frac{P_3}{P_1} \right) \cdot \frac{1}{\gamma M_1^2}$$

$$\Rightarrow C_x = 0,0704$$

En fait, pour être plus rigoureux, il faudrait multiplier cette valeur par un facteur de 2 pour donner la traînée totale de deux profils très éloignés.

$$\Rightarrow C_x = 0,141$$

qui est nettement supérieur au C_x pour deux monoplans placés à une distance h comme dans l'exercice (b).

